

4

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

REFLEXIONA Y RESUELVE

Resolución de sistemas 2×2 mediante determinantes

■ Resuelve, aplicando $x = \frac{|A_x|}{|A|}$ e $y = \frac{|A_y|}{|A|}$, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$$

Comprueba, en cada caso, la solución.

- ¿Cómo crees que sería la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas según la regla anterior?

Pon las fórmulas correspondientes y aplícalas a la resolución de estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Inversa de una matriz 2×2

■ $x = \frac{a_{22}}{|A|}, y = \frac{-a_{21}}{|A|}$

Obtén, de forma similar, las expresiones de z y de t . Llegarás, así, a la siguiente conclusión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Comprueba, efectuando el producto, que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

- Aplica la expresión anterior para calcular M^{-1} , siendo: $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

- Haz los productos $M \cdot M^{-1}$ y $M^{-1} \cdot M$ y comprueba que, en ambos casos, obtienes la matriz unidad.

- ¿Por qué crees que es necesario que el determinante de A sea distinto de cero para que una matriz cuadrada tenga inversa?

1. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases}$$

2. Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{cases}$$

- 1.** Enuncia la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

- 2.** Utilizando la regla de Cramer, resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

- 3.** Demuestra la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Procede de forma análoga a como se ha hecho en esta página.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

1. Discute y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$$

- 2.** Discute y resuelve, en función del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

1. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Calcula la inversa de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1. Expresa en forma matricial y resuelve (ten en cuenta el ejercicio 1 de la página anterior):**

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

2. Expresa en forma matricial y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Estudio y resolución de sistemas. Regla de Cramer

- 1 Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

2 Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

3 Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

4 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

5 Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Discusión de sistemas mediante determinantes

s6 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

$$\text{a) } \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{cases}$$

s7 Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

s8 ¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

Matriz inversa

9 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

s10 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11 Utiliza las matrices A^{-1} y B^{-1} que has calculado en el ejercicio anterior para resolver estas ecuaciones:

a) $AX = B$

b) $XB = A$

s12 Consideramos la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

Forma matricial de un sistema

13 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

14 Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PARA RESOLVER

s15 Determina los valores de m para los cuales son incompatibles estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

s16 Discute y resuelve según los valores de a :

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y = 2 - 2a \\ x + ay = a - 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$$

s17 Discute y resuelve, según los diferentes valores del parámetro a , estos sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$$

s18 Discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

s19 Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

20 Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ y resuélvelo.}$$

s21 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

• *Multiplica dos veces por A^{-1} , una vez por la izquierda y otra por la derecha.*

s22 Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

23 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

24 Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

25 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

s26 Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - az = -1 \\ x + (a + 3)y + (4 - a)z = 0 \\ x + (a + 3)y + (a^2 + 2)z = a + 2 \end{cases}$$

s27 Averigua los valores de α para los cuales admiten infinitas soluciones los sistemas siguientes. Obtén todas las soluciones e interpreta geoméricamente los resultados obtenidos:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$$

s28 Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

- s29** Halla, en función de a , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ y calcula, si existe, la matriz inversa A^{-1} en los casos $a = 1$ y $a = -1$.

s30 Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son regulares y calcula:

a) A^{-1} si $t = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

b) B^{-1} si $t = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s31 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real:

- Encuentra los valores de λ para los que AB es regular.
- Determina los valores de λ para los que BA es regular.
- Dados a y b , números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

s32 En el supuesto de que exista, calcula una matriz X tal que $AX = B$ en los siguientes casos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

s33 Dado el sistema:

$$S: \begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x + z = \beta \\ x - z = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

a) Demuestra que es compatible determinado para cualquier valor de α y β .

b) Resuélvelo para $\alpha = \beta = 1$.

CUESTIONES TEÓRICAS

- s34** En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:
- ¿Puede ser compatible?
 - ¿Puede tener solución única?
 - ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?
- s35** El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.
- s36** El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?
- 37** ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?
- s38** Dadas estas ecuaciones:
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$
- Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.
 - Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.
- Justifica en cada caso el procedimiento seguido para añadir la ecuación.

s39 Representa matricialmente los sistemas:

$$S: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 11x + 4y = 0 \end{cases} \quad S': \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x + 4y = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y averigua si existe alguna relación entre las soluciones obtenidas y la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Justifica la relación obtenida.

s40 Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos, y el de la matriz ampliada, tres, ¿qué interpretaciones geométricas podemos dar a ese sistema? Pon un ejemplo de un sistema de esas características y su interpretación geométrica.

s41 Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, $AX = B$ y $AX = B'$, tienen una misma matriz de coeficientes A , ¿puede ser incompatible uno de los dos sistemas mientras que el otro es compatible determinado?

s42 Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

PARA PROFUNDIZAR

43 Estudia y resuelve cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{cases}$$

44 Discute los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{cases}$$

45 Discute, según los valores de los parámetros, los sistemas siguientes:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = a \\ x \quad - z = b \\ x \quad + z = c \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay = b + 1 \\ -x \quad + z = b \end{cases}$$

- 46** Calcula los valores de a y b para los cuales cada uno de estos sistemas tiene infinitas soluciones. Resuélvelos para esos valores:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. a) Discute, en función de a , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

2. Demuestra que no hay valores de m para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

- 3.** Determina para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

4. Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:

a) $A^{-1}XA = B$ b) $(A + X)B = I$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

6. Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y & = & 1 \\ & y + z & = & a \\ x & - & 3z & = & -1 \\ & y - z & = & 2 \end{cases}$$

- 7.** En un sistema homogéneo de 3 ecuaciones y 2 incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2. Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.